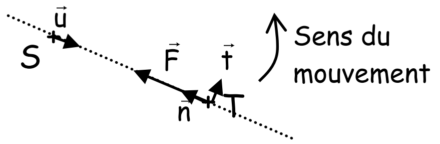
Corrigé: «Voyage autour de Saturne»

1- <u>Quelques caractéristiques de Titan</u> :

1.1 *Forces*

1.1.1 Titan subit la force d'interaction gravitationnelle exercée par Saturne.

1.1.2 1.1.3 $\vec{F} = -\dfrac{GM_T M_S}{R_T^2}\vec{u}$



où $\vec{u}$ est le vecteur unitaire de la droite ST dirigée de S vers T.

1.2 *Accélération et vitesse.*

1.2.1 D'après la seconde loi de Newton, appliquée à Titan, réduit à son centre d'inertie T, dans le référentiel Saturno-centrique : $\boxed{M_T.\vec{a} = \vec{F}}$ ($\vec{F}$ étant la seule force subie par Titan).

Donc : $M_T.\vec{a} = -\dfrac{G.M_T.M_S}{R_T^2}.\vec{u}$ donc $\boxed{\vec{a} = -\dfrac{G.M_S}{R_T^2}.\vec{u}}$

1.2.2 Pour Titan, en orbite circulaire de rayon R_T autour de Titan, on a : $\vec{a} = \dfrac{dv}{dt}.\vec{t} + \dfrac{v^2}{R_T}.\vec{n}$

Donc : $\boxed{a_t = \dfrac{dv}{dt} \text{ et } a_n = \dfrac{v^2}{R_T}}$

1.2.3 La force $\vec{F}$ est centripète (colinéaire à $\vec{n}$), le vecteur accélération est lui aussi centripète. Il se réduit donc à la composante normale $a_n\vec{n}$.

1.3 Type de mouvement

1.3.1 Le vecteur accélération de Titan étant normal on a donc $a_t = \dfrac{dv}{dt} = 0$, la valeur de la vitesse v de Titan est donc constante. Le mouvement de Titan autour de Saturne est uniforme.

1.3.2 D'après la deuxième loi de Newton on a :

$$\vec{a} = \frac{G.M_S}{R_T^2}.\vec{n} = \frac{v^2}{R_T}.\vec{n} \Leftrightarrow \frac{G.M_S}{R_T^2} = \frac{v^2}{R_T} \Leftrightarrow v^2 = \frac{G.M_S}{R_T} \Leftrightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{G.M_S}{R_T}}}$$

2- <u>D'autres satellites de Saturne</u> :

2.1.1 *Loi de Kepler*

$$v = \frac{2\pi.R}{T} = \sqrt{\frac{G.M_S}{R}} \Leftrightarrow \frac{4\pi^2.R^2}{T^2} = \frac{G.M_S}{R} \Leftrightarrow \frac{R^3}{T^2} = \frac{G.M_S}{4\pi^2} \Leftrightarrow \frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{G.M_S}$$

2.1.2 $\dfrac{R^3}{T^2} = \dfrac{G.M_S}{4\pi^2} \Leftrightarrow R^3 = \dfrac{G.M_S}{4\pi^2}.T^2 \Leftrightarrow \boxed{R = \sqrt[3]{\dfrac{G.M_S}{4\pi^2}.T^2}}$

Soit : $R_E = \sqrt[3]{\dfrac{6,67\text{x}10^{-11}\text{x}5,69\text{x}10^{26}}{4\pi^2}\text{x}(1,37\text{x}3600\text{x}24)^2}$ = $\mathbf{2,38 \times 10^8}$ **m**

3- <u>Satellite saturno-stationnaire</u>

3.1 Un satellite saturno-stationnaire reste à la verticale du même point. Sa période de révolution est égale à la durée d'un jour sur Saturne. $T_C = T_S$.

3.2 *Altitude de la sonde*

3.2.1 On a vu à la question 2.1.2 : $R_C = \sqrt[3]{\dfrac{G.M_S}{4\pi^2}.T_C^2}$ où R_C est le rayon de l'orbite de la sonde Cassini.

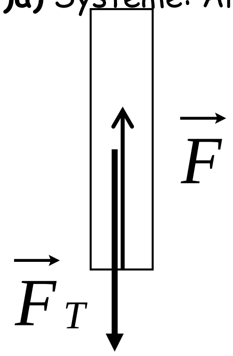
Or $R_C = R_S + h$ et $T_C = T_S$ donc : $\boxed{h = \sqrt[3]{\dfrac{G.M_S}{4\pi^2}.T_S^2} - R_S}$

3.1.1 **h** = $\sqrt[3]{\dfrac{6,67\text{x}10^{-11}\text{x}5,69\text{x}10^{26}}{4\pi^2}\text{x}(10\text{x}3600 + 39\text{x}60)^2} - 6,0\text{x}10^7$ = $\mathbf{5,2 \times 10^8}$ **m**

Sujet II. Mise en orbite d'un satellite artificiel par la fusée Ariane

1) L'ascension de la fusée Ariane

1)a) Système: Ariane référentiel: terrestre supposé galiléen



inventaire des forces:

$\overrightarrow{F_T}$: Force d'interaction gravitationnelle exercée par la Terre

$\overrightarrow{F}$: Force de poussée

b) On applique la 2ème loi de Newton: $\overrightarrow{F_T} + \overrightarrow{F} = m.\vec{a}$

par projection sur l'axe O_Z vertical dirigé vers la haut:

$$- F_T + F = m.a_z$$

$a_z = \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{F - F_T}{m}$ on assimile F_T à la force poids soit $F_T = m.g_0$

$$a_z = \frac{F}{m} - g_0$$

c) $a_{z1} = \frac{F}{m_1} - g_0 = \frac{2445.10^3}{208.10^3} - 9{,}8$ $a_{z1} = 1{,}95$ donc $a_1 = 1{,}95\ m.s^{-2}$

$m_2 = m_1$ – masse de peroxyde d'azote emporté

$m_2 = 208\ .10^3 - 147{,}5.10^3 = 60{,}5.10^3$ kg donc $a_2 = \frac{F}{m_2} - g_0 = \frac{2445.10^3}{60{,}5.10^3} - 9{,}8 = 30{,}6\ m.s^{-2}$

La somme des forces est constante mais la masse de la fusée varie donc la valeur de l'accélération change au cours du temps. Le mouvement n'est pas uniformément accéléré.

d) $\overrightarrow{V}_e = \frac{\Delta t}{\Delta m}.\overrightarrow{F}$

- <u>Analyse dimensionnelle:</u> On exprime l'intensité d'une force en Newtons en utilisant les unités S.I.:

  P = m.g Newtons = [M].[L].[T]$^{-2}$

[Ve] = $\frac{[T]}{[M]}$.[M].[L].[T]$^{-2}$

[Ve] = [L] . [T]$^{-1}$ ces unités sont bien celles d'une vitesse.

- <u>Calcul de Ve:</u> en Δt = 145 secondes la fusée subit une variation de masse $|\Delta m|$ = 147,5 tonnes.

Ve = $\frac{145}{147{,}5.10^3} \times 2445.10^3 = 2{,}40.10^3 m.s^{-1}$ $\Delta t / \Delta m$ est négatif puisque $\Delta m < 0$ (perte de masse)

Donc $\overrightarrow{V_e}$ est orienté vers le bas, opposé à $\overrightarrow{F}$.Ceci est logique, les molécules de gaz sont éjectées de la fusée, elles s'éloignent de celle-ci.

D'après la 3ème loi de Newton, principe des actions réciproques:

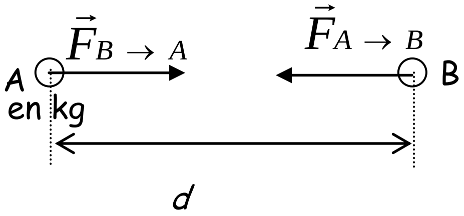
les moteurs exercent sur les gaz une force verticale vers le bas, alors les gaz exercent sur la fusée une force verticale vers le haut de même valeur.

2) Étude du satellite artificiel situé à basse altitude (h = 200 km)

a) $\vec{a} = \frac{dv}{dt}.\vec{\tau} + \frac{v^2}{r}.\vec{n}$ avec $\vec{\tau}$ vecteur unitaire tangent à la trajectoire circulaire, orienté dans le sens du mouvement et $\vec{n}$ vecteur unitaire radial et centripète.

Le mouvement étant uniforme dv/dt = 0, on a $\vec{a} = \frac{v^2}{r}.\vec{n}$

b) $\vec{F}_{A \to B} = -G . \frac{m.m'}{d^2}.\overrightarrow{u_{AB}}$



m masse de l'objet A et m' masse de l'objet B exprimées en kg
G constante de gravitation universelle $G = 6{,}67.10^{-11}$ u.S.I.

$\overrightarrow{u_{AB}} = \frac{1}{\|\overrightarrow{AB}\|} \times \overrightarrow{AB}$

Le signe – dans l'expression vectorielle est nécessaire pour que $\vec{F}_{A \to B}$ ait un sens opposé à celui de $\overrightarrow{u_{AB}}$

Les vecteurs modélisant les forces d'attraction gravitationnelle ont respectivement pour point d'application les centres des solides A et B.
D'après la 3ème loi de Newton (principe des actions réciproques) $\vec{F}_{A \to B} = - \vec{F}_{B \to A}$

c) $\overrightarrow{F_S} = m_S.\overrightarrow{g(h)}$ donc $F_S = m_S . g(h)$ et $F_S = G.\frac{m_S.M_T}{(R_T + h)^2}$

donc $g(h) = G.\frac{M_T}{(R_T + h)^2}$. avec $g_0 = g(0) = G.\frac{M_T}{R_T{}^2}$ donc $g(h) = g_0 . \frac{R_T{}^2}{(R_T + h)^2}$

d) Le système satellite dans le référentiel géocentrique (supposé galiléen) subit la force d'attraction de la Terre. La deuxième loi de Newton conduit à $\overrightarrow{F_S} = m_S.\vec{a}$

Par projection suivant l'axe radial orienté positivement du satellite vers le centre de la Terre, il vient:
$m_S . g(h) = m_S . a$
donc $a = g(h)$.

On a vu dans la question 2)a) que $a = v^2/r$ soit ici $a = \frac{v_S{}^2}{(R_T + h)} = g(h)$

$$\frac{v_S{}^2}{(R_T + h)} = g_0 . \frac{R_T{}^2}{(R_T + h)^2}$$

$$v_S = \sqrt{g_0.\frac{R_T{}^2}{(R_T + h)}}$$

Période de révolution T_S : $T_S = \frac{2.\pi.(R_T + h)}{v_S}$

$$T_S^2 = \frac{4.\pi^2.(R_T + h)^2}{g_0.\frac{R_T^2}{(R_T + h)}} \qquad T_S^2 = \frac{4.\pi^2.(R_T + h)^3}{g_0.R_T^2} \qquad T_S = \frac{2.\pi.(R_T + h)^{3/2}}{g_0{}^{1/2}.R_T}$$

e) $v_S = \sqrt{9{,}8.\frac{(6400.10^3)^2}{6600.10^3}} = 7{,}8.10^3$ m.s^{-1}

$T_S = \frac{2.\pi.(6600.10^3)^{3/2}}{9{,}8^{1/2} \times 6400.10^3} = 5{,}3.10^3$ s